

7. 1. POJECIE CIĄGU

Ciągiem nazywamy funkcję $f : N_+ \rightarrow A$.

$f(1) = a_1$ - pierwszy wyraz ciągu ,

$f(2) = a_2$ - drugi wyraz ciągu,

$f(3) = a_3$ - trzeci wyraz ciągu

$f(n) = a_n$ - n -ty wyraz ciągu

Sposoby określenia ciągu :

- Opis słowny.
- Wzór ogólny ciągu (wzór na n – ty wyraz)
- Wykres ciągu.

Przykład 7.1.1. Wypisz pięć początkowych wyrazów ciągu kolejnych liczb parzystych większych od 5.

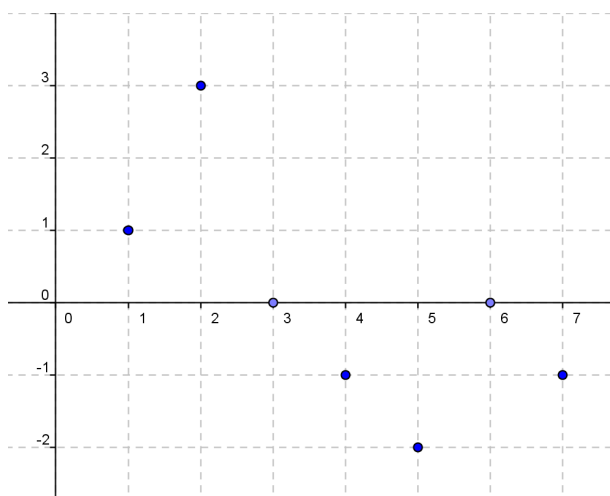
Rozwiązanie	Komentarz
$a_1 = 6; a_2 = 8; a_3 = 10; a_4 = 12; a_5 = 14$	Wypisujemy wyrazy ciągu.

Przykład 7.1.2. Wypisz pięć początkowych wyrazów ciągu znając jego wzór ogólny:

$$a_n = 2n \cdot (-1)^n$$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_1 = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^1 = -2$ $a_2 = 2 \cdot 2 \cdot (-1)^2 = 4$ $a_3 = 2 \cdot 3 \cdot (-1)^3 = -6$ $a_4 = 2 \cdot 4 \cdot (-1)^4 = 8$ $a_5 = 2 \cdot 5 \cdot (-1)^5 = -10$	Wypisujemy wyrazy ciągu, wstawiając za n kolejne liczby naturalne dodatnie.

Przykład 7.1.3. Rysunek przedstawia wykres ciągu (b_n) . Wypisz pięć początkowych wyrazów tego ciągu .



Rozwiązanie	Komentarz
$b_1 = 1; b_2 = 3; b_3 = 0; b_4 = -1; b_5 = -2$	Wypisujemy wyrazy ciągu. Z osi x odczytujemy numery wyrazów, a z osi y wartości wyrazów.

Przykład 7.1.4. Podaj wzór ogólny ciągu: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_n = \frac{1}{2^n}$	Zauważmy, że w każdym liczniku jest 1, natomiast w mianowniku potęgi 2. Sprawdzamy poprawność wzoru: $a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ $a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $a_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

Przykład 7.1.5. Narysuj wykres ciągu: $c_n = n^2 - 2n$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

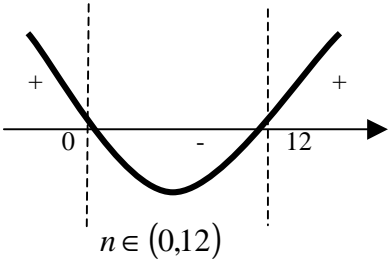
Rozwiązanie	Komentarz
$c_1 = -1; c_2 = 0; c_3 = 3; c_4 = 8$	Wypisujemy cztery pierwsze wyrazy ciągu.
	W układzie współrzędnych zaznaczamy punkty $(1, -1); (2, 0); (3, 3); (4, 8)$, gdzie pierwsza współrzędna jest numerem wyrazu, a druga współrzędna wyrazem ciągu.

Przykład 7.1.6. Ciąg jest podany wzorem ogólnym $a_n = n^2 - 12n$

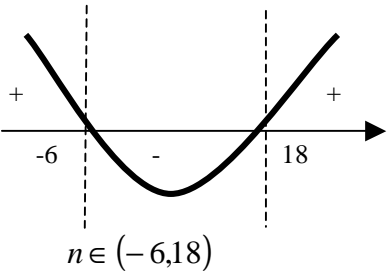
a) Ile wynosi dwudziesty wyraz ciągu (a_n) ?

Rozwiązanie	Komentarz
$a_{20} = 20^2 - 12 \cdot 20 = 400 - 240 = 160$ Odp. Dwudziesty wyraz ciągu (a_n) jest równy 160.	Obliczamy dwudziesty wyraz ciągu, wstawiając 20 za n .

b) Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne ?

Rozwiązanie	Komentarz
$n^2 - 12n < 0$ $a = 1, b = -12, c = 0$ $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 144$ $n_1 = \frac{12 - \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{12 - 12}{2} = 0$ $n_2 = \frac{12 + \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{12 + 12}{2} = 12$	<p>Rozwiązujemy nierówność : $a_n < 0$</p> <p>Przy rozwiązywaniu nierówności wykorzystujemy wzory:</p> $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 <p style="text-align: center;">$n \in (0, 12)$</p>	<p>Sporządzamy szkic wykresu trójmianu $n^2 - 12n$.</p> <p>Z wykresu odczytujemy rozwiązania nierówności.</p>
$n \in (0, 12) \cap N_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ <p>Odp. Wyrazami ujemnymi są wyrazy od pierwszego do jedenastego</p>	<p>Zapisujemy odpowiedź uwzględniając, że $n \in N_+$</p>

c) Ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od 108 ?

Rozwiązanie	Komentarz
$n^2 - 12n < 108$ $n^2 - 12n - 108 < 0$ $a = 1, b = -12, c = -108$ $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 144 + 432 = 576$ $n_1 = \frac{12 - \sqrt{576}}{2 \cdot 1} = \frac{12 - 24}{2} = -6$ $n_2 = \frac{12 + \sqrt{576}}{2 \cdot 1} = \frac{12 + 24}{2} = 18$	<p>Rozwiązujemy nierówność : $a_n < 108$</p>
 <p style="text-align: center;">$n \in (-6, 18)$</p>	<p>Sporządzamy szkic wykresu trójmianu $n^2 - 12n - 108$.</p> <p>Z wykresu odczytujemy rozwiązania nierówności.</p>
$n \in (-6, 18) \cap N_+ =$ $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ <p>Odp. Siedemnaście wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od 108.</p>	<p>Zapisujemy odpowiedź uwzględniając, że $n \in N_+$</p>

Każdy z ciągów: rosnący, malejący, stały, nierosnący, niemalejący jest **ciągami monotonicznymi**.

Aby zbadać monotoniczność ciągu należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+1} - a_n > 0 \text{ - ciąg rosnący}$$

$$a_{n+1} - a_n < 0 \text{ - ciąg malejący}$$

$$a_{n+1} - a_n = 0 \text{ - ciąg stały}$$

$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \text{ - ciąg nierosnący}$$

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \text{ - ciąg niemalejący}$$

Przykład 7.1.7. Zbadaj monotoniczność ciągu:

a) $a_n = 2n - 5$

Rozwiązanie	Komentarz
$a_n = 2n - 5$	Zapisujemy n -ty wyraz ciągu.
$a_{n+1} = 2(n+1) - 5 = 2n - 3$	Wyznaczamy wyraz następny, za n wstawiając $n+1$
$a_{n+1} - a_n = (2n - 3) - (2n - 5) = 2n - 3 - 2n + 5 = 2$	Wyznaczamy różnicę tych wyrazów.
$a_{n+1} - a_n = 2 > 0$ Odp. Ciąg (a_n) jest rosnący.	Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ i ustalamy monotoniczność ciągu

Suma częściowa ciągu (a_n)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Przykład 7.1.8. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu $d_n = 4 - 2n$.

Rozwiązanie	Komentarz
$d_1 = 2, d_2 = 0, d_3 = -2, d_4 = -4, d_5 = -6$	Obliczamy pięć początkowych wyrazów ciągu.
$S_5 = 2 + 0 + (-2) + (-4) + (-6) = -10$	Dodajemy wyznaczone wyrazy i obliczamy sumę S_5 pięciu początkowych wyrazów ciągu.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 7.1.1. (1pkt.) Ciąg jest określony wzorem $a_n = \frac{1-n}{2+n}$. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie piątego wyrazu ciągu .	1

Ćwiczenie 7.1.2. (1pkt.) Ciąg jest określony wzorem $b_n = n^2 - 3n$. Wyznacz b_{2k+1} .

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie b_{2k+1} .	1

Ćwiczenie 7.1.3. (1pkt.) Którym wyrazem ciągu $c_n = 27 - 3n$ jest liczba 6?

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie który wyraz ciągu jest równy 6.	1

Ćwiczenie 7.1.4. (1pkt.) Które wyrazy ciągu $c_n = 27 - 3n$ należą do przedziału $\langle -5,5 \rangle$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie które wyrazy ciągu należą do przedziału $\langle -5,5 \rangle$.	1

Ćwiczenie 7.1.5. (2pkt.) Zbadaj monotoniczność ciągu $d_n = 2 - 3n$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyrazu następnego a_{n+1} .	1
2	Podanie różnicy $a_{n+1} - a_n$ i określenie monotoniczności ciągu.	1